Cuprins

Capitolul 1
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)

O fracție zecimală infinită și neperiodică se numește *număr irațional*. Prin *număr real* înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{p}$, p număr prim, π, e.

Proprietăţi ale numerelor raţionale:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y$; $x - y, xy \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; c) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, p, q sunt numere prime, atunci $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Probleme rezolvate

1. Arătați că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, p număr prim:

a) $a + b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$; b) $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$.

Soluție. a) Presupunem $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{p} = -\frac{a}{b}$, unde $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 0$; b) $(a - c) + (b - d)\sqrt{p} = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} a - c = 0$ și $b - d = 0 \Rightarrow a = c$ și $b = d$.

2. Demonstrați că mulțimea $A = \left\{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n + 1} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soluție. Se știe că dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Presupunem că $\sqrt{n^2 - 3n + 2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{n^2 + n + 1} \in \mathbb{Q}$. Avem $a = n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$ și $b = n^2 + n + 1$, cu $n^2 < b < (n + 1)^2$. Deci a, b nu sunt pătrate perfecte și $a, b \notin \mathbb{Q}$, $a + b \notin \mathbb{Q}$, de unde $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. Fie $a, b, c \in [0, 1]$ și $A = \frac{a^2 + a}{4 + b^3 + c^3} + \frac{b^2 + b}{4 + c^3 + a^3} + \frac{c^2 + c}{4 + a^3 + b^3}$. Demonstrați că $A \leq 1$.

Soluție. Avem $4 + b^3 + c^3 = 3 + 1 + b^3 + c^3 > 3 + a^3 + b^3 + c^3 = x$ și analoagele. Atunci $A = \frac{a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c}{x} \leq 1 \Leftrightarrow (a^2 + a - a^3 - 1) + (b^2 + b - b^3 - 1) + (c^2 + c - c^3 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 1) + (b - 1)^2(b + 1) + (c - 1)^2(c + 1) \geq 0$.

4. Determinați prima zecimală după virgulă a numărului $a = \sqrt{9n^2 + 4n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Prima zecimală după virgulă a numărului a este $[10\{a\}]$. Avem $(3n)^2 < 9n^2 +$

$+ 4n < (3n + 1)^2$ și deci $[a] = 3n$. Se arată că $(3n + 0{,}6)^2 < 9n^2 + 4n < (3n + 0{,}7)^2$ și atunci prima zecimală după virgulă a lui a este 6.

5. Fie $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 3$. Determinați valoarea maximă a expresiei:

$$A = \sqrt{2a+b+c} + \sqrt{a+2b+c} + \sqrt{a+b+2c}\ .$$

Soluție. Folosim inegalitatea $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$. Atunci $A^2 \le$ $\le 3(3a + b + c + a + 2b + c + a + b + 2c) = 12(a + b + c) = 36$. Avem egalitate pentru $a = b = c = 1$.

6. Determinați mulțimea $M = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in (0,\ 1) \right\}$.

Soluție. Dacă $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{b} \in (0, 1)$. Dacă $0 < b < a \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$ și atunci $M \subset (0, \infty)$.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x^2 \in (0, 1)$ și $x = \frac{x^2}{x}$. Luăm $a = x^2$, $b = x$. Dacă $x > 1$, atunci $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < 1$ și $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x$ și luăm $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{x^2} \in (0, 1)$. Avem $1 = \frac{a}{a}$, $\forall\ a \in (0, 1)$.

Avem deci $(0, \infty) \subset M$ și obținem $M = (0, \infty)$.

Observație. Avem și egalitatea $\left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a > 1, b > 1 \right\} = (0, 1)$.

7. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{n}}{\sqrt{3} + \sqrt{m}} \in \mathbb{Q}$.

Soluție. Fie $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{n}}{\sqrt{3} + \sqrt{m}} = \frac{p}{q}$. Obținem $q\sqrt{2} - p\sqrt{3} =$

$= p\sqrt{m} - q\sqrt{n} \Leftrightarrow p^2 m + q^2 n - 3p^2 - 2q^2 = 2pq\left(\sqrt{6} - \sqrt{mn}\right) \Leftrightarrow \sqrt{6} - \sqrt{mn} =$

$= \frac{p^2 n + q^2 n - 3p^2 - 2q^2}{2pq} = r \in \mathbb{Q}$. Dacă $m = 0$ sau $n = 0$, rezultă $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ (imposibil) și atunci $mn = 6$. Obținem $(n, m) \in \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$ și convine $n = 2$, $m = 3$.

8. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că $A = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \ge 12$.

Soluție. Avem $A \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} = \frac{(t+3)^2}{t}$, unde $a + b + c - 3 = t > 0$. Cum $(t + 3)^2 \ge$ $\ge 12t \Leftrightarrow t^2 + 9 - 6t \ge 0 \Leftrightarrow (t - 3)^2 \ge 0$, rezultă că $A \ge 12$.

9. Determinați numerele reale x, y, z, știind că $x = \frac{2z^2}{1+x^2}$, $y = \frac{2x^2}{1+y^2}$, $z = \frac{2y^2}{1+z^2}$.

Soluție. Observăm că $x, y, z \in [0, \infty)$ și că avem soluțiile $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. Cum pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem $\frac{2a}{a^2+1} \le 1$, obținem $x \le z \cdot \frac{2z}{z^2+1} \le z$ și analog $y \le z$, $z \le x$, de unde $x = y = z$. Sistemul nu mai are alte soluții.

10. Calculați numărul $x = \frac{1}{1,\underbrace{00...01}_{100 \text{ cifre}}}$ cu 200 zecimale.

Soluție. Fie $a = 0,\underbrace{00...01}_{100 \text{ cifre}}$. Avem $\frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1 - a \cdot \frac{1+a-a}{a} = 1 - a +$ $+ \frac{a^2}{1+a} = 1 - a + a^2 \cdot \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - a + 1 - \frac{a^3}{1+a} = 1 - \frac{1}{10^{100}} + \frac{1}{10^{200}} - \frac{a^3}{1+a} = 0,\underbrace{99...9}_{100 \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{99 \text{ cifre}}1 -$ $- \frac{a^3}{1+a} < a^3 = \frac{1}{10^{300}}$, aproximarea cerută este $0,\underbrace{99...9}_{100 \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{99 \text{ cifre}}1$.

Probleme propuse

1. Stabiliți care din următoarele numere sunt numere raționale:

a) $\sqrt{169}$; b) $\sqrt{\frac{144}{289}}$; c) $\sqrt{1,0201}$;

d) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$; e) $\sqrt{1+3+5+...+27}$; f) $\sqrt{2+4+6+...+2000}$.

2. Dați exemplu de câte două numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{19}$.

3. Demonstrați că există $m, n \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

a) $\left(3 + 2\sqrt{5}\right)^2 = m + n\sqrt{5}$; b) $\left(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}\right)^2 = m + n\sqrt{6}$;

c) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right)^2 = m + n\sqrt{5}$; d) $\left(\frac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^2 = m - n\sqrt{6}$.

4. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; b) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; d) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $(x + y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$; f) $xy \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$.

5. Fie $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \le 21;\ \sqrt{5n+a} \notin \mathbb{Q}\}$. Demonstrați că avem card $A \ge 8$.

6. Determinați mulțimile:

a) $A \in \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2 - n + 1} \in \mathbb{Z}\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2 - 5n + 7} \in \mathbb{Z}\}$.

7. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) pentru orice numere întregi a, b impare, $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

b) pentru orice numere întregi pare a și b, avem $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

c) există a, b numere întregi impare cu $\sqrt{a^3+b^3} \in \mathbb{Q}$.

8. Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

a) $\dfrac{x\sqrt{3}+y}{2-\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$; b) $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{3-\sqrt{2}} = 1+y$.

9. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;
c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$; d) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;
e) $(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc$; f) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$;
g) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$; h) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea: $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}\right\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că avem $\text{card}\left(A \cap \left(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\right)\right) = 85$.

11. Fie $a, b, c > 0$ iar $a + b + c = 3$. Fie $A = \sqrt{9a+2} + \sqrt{9b+3} + \sqrt{9c+4}$. Demonstrați că $A < \dfrac{39}{2}$.

12. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ și $m, n, p \in \mathbb{N}$, astfel încât $a + mb = \sqrt{2}$, $a + nb = \sqrt{5}$, $a + pb = \sqrt{11}$.

13. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$ (proprietatea lui Arhimede).

14. Fie $r \in \mathbb{Q}_+^*$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Demonstrați că numărul $\dfrac{r+2}{r+1}$ este o aproximare „mai bună” pentru $\sqrt{2}$ $\left(\text{adică avem } \left|\dfrac{\text{r}+2}{\text{r}+1} - \sqrt{2}\right| \leq \left|r - \sqrt{2}\right|\right)$.

15. Construiți numai cu rigla și compasul imaginile geometrice ale numerelor:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{13}.$$

16. Determinați părțile întregi ale numerelor:

a) $a_n = \sqrt{n^2+n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2+6n}$; c) $c_n = \sqrt{n^2+7n}$.

17. Demonstrați că între orice două numere reale distincte există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

18. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{x^2+y+1}+\sqrt{y^2+x+4}=a \in \mathbb{N}$.

19. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați că cel mult două dintre numerele $2a-\frac{1}{b}$, $2b-\frac{1}{c}$, $2c-\frac{1}{a}$ sunt supraunitare.

20. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Aflați minimul expresiei:

$$E=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}.$$

21. Rezolvați în numere reale ecuația $x^8 + y^8 + 6 = 8xy$.

22. Eliminați $a, b \in \mathbb{R}^*$ între relațiile $x = a + \frac{1}{a}$, $y = b + \frac{1}{b}$, $z = c + \frac{1}{c}$.

23. Fie $1 \le a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comparați numerele $A=\frac{b^n-a^n}{n}$ și $B=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

24. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați $A \ge B$, unde:

$$A=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right),\ B=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right).$$

25. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calculați $\sum_{i,j=1}^{n} f\left(\frac{i}{j}\right)$.

26. Fie $n \ge 4$. Calculați $S=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$.

27. Fie $a_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, $n \ge 3$, cu $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2$. Demonstrați că $S_k \le n$, unde:

$$S=\sqrt{a_1(a_2+a_3+...+a_n)}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+...+a_n)}+...+\sqrt{a_n(a_1+a_2+...+a_{n-1})}.$$

28. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$. Demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2}=A \in \mathbb{Q}$.

29. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Demonstrați că $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=B \in \mathbb{Q}$.

30. Fie $a, b, x > 0$, astfel încât $a + b = 2$. Demonstrați că $A \ge 2\sqrt{x+1}$, unde:

$$A=\sqrt{x+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{x+\frac{1}{b^2}}.$$