

Cuprins

Capitolul 1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări).....	3
1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3.....	8
1.3. Radicali de ordinul n	15
1.4. Puteri cu exponent rațional.....	21
1.5. Puteri cu exponent real.....	25
1.6. Logaritmi.....	27
1.7. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	32

Capitolul 2. FUNCȚII ȘI ECUAȚII

2.1. Compunerea funcțiilor. Inversa unei funcții.....	35
2.2. Funcții injective. Funcții surjective. Funcții bijective.....	42
2.3. Funcții convexe. Funcții concave.....	49
2.4. Funcții pare. Funcții impare. Funcții periodice. Centre de simetrie. Axe de simetrie.....	55
2.5. Funcții monotone. Funcții mărginite.....	61
2.6. Funcția putere cu exponent întreg.....	68
2.7. Funcția radical.....	73
2.8. Ecuatii iraționale. Inecuații iraționale.....	78
2.9. Funcția exponențială.....	82
2.10. Funcția logaritmică.....	89
2.11. Ecuatii și inecuații exponențiale.....	95
2.12. Ecuatii și inecuații logaritmice.....	101
2.13. Sisteme de ecuații (inecuații) exponențiale și logaritmice.....	107
2.14. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	111

Capitolul 3. METODE DE NUMĂRARE

3.1. Inducția matematică.....	116
3.2. Mulțimi finite ordonate. Permutări.....	121
3.3. Aranjamente.....	126
3.4. Combinări.....	129
3.5. Binomul lui Newton.....	134
3.6. Probleme de numărare.....	139
3.7. Identități în calculul cu combinări.....	143
3.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare.....	146

Capitolul 4. MATEMATICI FINANCIARE

4.1. Procente. Dobânzi. TVA.....	148
4.2. Preț de cost. Profit. Credite. Bugete.....	151
4.3. Evenimente. Câmp finit de probabilitate.....	154
4.4. Probabilități condiționate. Evenimente independente. Regula înmulțirii probabilităților. Formula lui Bayes.....	158

4.5. Scheme clasice de probabilitate.....	160
4.6. Variabile aleatoare. Operații cu variabile aleatoare.....	165
4.7. Valori tipice ale variabilelor aleatoare.....	168

Capitolul 5. NUMERE COMPLEXE

5.1. Numere complexe sub formă algebrică. Operații cu numere complexe.....	171
5.2. Conjugatul unui număr complex. Modulul unui număr complex.....	176
5.3. Interpretarea geometrică a unor operații cu numere complexe	183
5.4. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu coeficienți complecși	187
5.5. Numere complexe sub formă trigonometrică. Produsul și câtul a două numere complexe	191
5.6. Operații cu numere complexe. Formula lui Moivre	196
5.7. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome	201
5.8. Rădăcinile de ordinul n ale unității.....	205
5.9. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	209
5.10. Aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie și algebră	215
5.11. Probleme pentru olimpiade și concursuri	219

TESTE DE EVALUARE	223
--------------------------------	------------

SOLUȚII

Capitolul 1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări).....	229
1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3	231
1.3. Radicali de ordinul n	233
1.4. Puteri cu exponent rațional.....	236
1.5. Puteri cu exponent real	237
1.6. Logaritmi	238
1.7. Probleme pentru olimpiade și concursuri	240

Capitolul 2. FUNCȚII ȘI ECUAȚII

2.1. Compunerea funcțiilor. Inversa unei funcții.....	243
2.2. Funcții injective. Funcții surjective. Funcții bijective	245
2.3. Funcții convexe. Funcții concave	247
2.4. Funcții pare. Funcții impare. Funcții periodice. Centre de simetrie. Axe de simetrie	249
2.5. Funcții monotone. Funcții mărginite	251
2.6. Funcția putere cu exponent întreg	253
2.7. Funcția radical	253
2.8. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale.....	255
2.9. Funcția exponențială.....	257
2.10. Funcția logaritmică.....	262
2.11. Ecuații și inecuații exponențiale	265
2.12. Ecuații și inecuații logaritmice	268

2.13. Sisteme de ecuații (inecuații) exponențiale și logaritmice	272
2.14. Probleme pentru olimpiade și concursuri	274
Capitolul 3. METODE DE NUMĂRARE	
3.1. Inducția matematică.....	284
3.2. Mulțimi finite ordonate. Permutări	287
3.3. Aranjamente	289
3.4. Combinări.....	290
3.5. Binomul lui Newton	293
3.6. Probleme de numărare	296
3.7. Identități în calculul cu combinări.....	296
3.8. Probleme pentru olimpiade și concursuri	298
Capitolul 4. MATEMATICI FINANCIARE	
4.1. Procente. Dobânzi. TVA	300
4.2. Preț de cost. Profit. Credite. Bugete	301
4.3. Evenimente. Câmp finit de probabilitate	302
4.4. Probabilități condiționate. Evenimente independente. Regula înmulțirii probabilităților. Formula lui Bayes	303
4.5. Scheme clasice de probabilitate.....	304
4.6. Variabile aleatoare. Operații cu variabile aleatoare.....	305
4.7. Valori tipice ale variabilelor aleatoare.....	306
Capitolul 5. NUMERE COMPLEXE	
5.1. Numere complexe sub formă algebrică. Operații cu numere complexe.....	307
5.2. Conjugatul unui număr complex. Modulul unui număr complex.....	309
5.3. Interpretarea geometrică a unor operații cu numere complexe	313
5.4. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu coeficienți complecși	314
5.5. Numere complexe sub formă trigonometrică. Produsul și câtul a două numere complexe	315
5.6. Operații cu numere complexe. Formula lui Moivre	317
2.7. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome.....	321
5.8. Rădăcinile de ordinul n ale unității.....	324
5.9. Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	324
5.10. Aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie și algebră	327
5.11. Probleme pentru olimpiade și concursuri	329

Capitolul 1

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)

O fracție zecimală infinită și neperiodică se numește *număr irațional*. Prin *număr real* înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Exemple de numere iraționale: \sqrt{p} , p număr prim, π , e .

Proprietăți ale numerelor raționale:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y; x - y, xy \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; c) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$,

p, q sunt numere prime, atunci $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Probleme rezolvate

1. Arătați că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, p număr prim:

a) $a + b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$; b) $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow a = c$ și $b = d$.

Soluție. a) Presupunem $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{p} = -\frac{a}{b}$, unde $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$; b) $(a - c) + (b - d)\sqrt{p} = 0 \stackrel{a)}{\Rightarrow} a - c = 0$ și $b - d = 0 \Rightarrow a = c$ și $b = d$.

2. Demonstrați că mulțimea $A = \{\sqrt{n^2 - 3n + 2} + \sqrt{n^2 + n + 1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Soluție. Se știe că dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Presupunem că $\sqrt{n^2 - 3n + 2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{n^2 + n + 1} \in \mathbb{Q}$. Avem $a = n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$ și $b = n^2 + n + 1$, cu $n^2 < b < (n + 1)^2$. Deci a, b nu sunt pătrate perfecte și $a, b \notin \mathbb{Q}$, $a + b \notin \mathbb{Q}$, de unde $A \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. Fie $a, b, c \in [0, 1]$ și $A = \frac{a^2 + a}{4 + b^3 + c^3} + \frac{b^2 + b}{4 + c^3 + a^3} + \frac{c^2 + c}{4 + a^3 + b^3}$. Demonstrați că $A \leq 1$.

Soluție. Avem $4 + b^3 + c^3 = 3 + 1 + b^3 + c^3 > 3 + a^3 + b^3 + c^3 = x$ și analoge. Atunci

$A = \frac{a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c}{x} \leq 1 \Leftrightarrow (a^2 + a - a^3 - 1) + (b^2 + b - b^3 - 1) + (c^2 + c - c^3 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 1) + (b - 1)^2(b + 1) + (c - 1)^2(c + 1) \geq 0$.

4. Determinați prima zecimală după virgulă a numărului $a = \sqrt{9n^2 + 4n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Prima zecimală după virgulă a numărului a este $[10\{a\}]$. Avem $(3n)^2 < 9n^2 +$

+ $4n < (3n + 1)^2$ și deci $[a] = 3n$. Se arată că $(3n + 0,6)^2 < 9n^2 + 4n < (3n + 0,7)^2$ și atunci prima zecimală după virgulă a lui a este 6.

5. Fie $a, b, c > 0$ și $a + b + c = 3$. Determinați valoarea maximă a expresiei:

$$A = \sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c}.$$

Soluție. Folosim inegalitatea $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Atunci $A^2 \leq 3(3a + b + c + a + 2b + c + a + b + 2c) = 12(a + b + c) = 36$. Avem egalitate pentru $a = b = c = 1$.

6. Determinați mulțimea $M = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in (0, 1) \right\}$.

Soluție. Dacă $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{b} \in (0, 1)$. Dacă $0 < b < a \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$ și atunci $M \subset (0, \infty)$.

Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x^2 \in (0, 1)$ și $x = \frac{x^2}{x}$. Luăm $a = x^2$, $b = x$. Dacă $x > 1$, atunci

$\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < 1$ și $\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x$ și luăm $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{x^2} \in (0, 1)$. Avem $1 = \frac{a}{b}$, $\forall a \in (0, 1)$.

Avem deci $(0, \infty) \subset M$ și obținem $M = (0, \infty)$.

Observație. Avem și egalitatea $\left\{ \frac{a}{b} \mid a > 1, b > 1 \right\} = (0, 1)$.

7. Determinați $m, n \in \mathbb{N}$, știind că $a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{n}}{\sqrt{3} + \sqrt{m}} \in \mathbb{Q}$.

Soluție. Fie $(p, q) = 1$, $p, q \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{n}}{\sqrt{3} + \sqrt{m}} = \frac{p}{q}$. Obținem $q\sqrt{2} - p\sqrt{3} =$

$$= p\sqrt{m} - q\sqrt{n} \Leftrightarrow p^2m + q^2n - 3p^2 - 2q^2 = 2pq(\sqrt{6} - \sqrt{mn}) \Leftrightarrow \sqrt{6} - \sqrt{mn} =$$

$$= \frac{p^2n + q^2n - 3p^2 - 2q^2}{2pq} = r \in \mathbb{Q}. \text{ Dacă } m = 0 \text{ sau } n = 0, \text{ rezultă } \sqrt{6} \in \mathbb{Q} \text{ (imposibil) și}$$

atunci $mn = 6$. Obținem $(n, m) \in \{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$ și convine $n = 2, m = 3$.

8. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Demonstrați că $A = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 12$.

Soluție. Avem $A \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} = \frac{(t+3)^2}{t}$, unde $a + b + c - 3 = t > 0$. Cum $(t+3)^2 \geq$

$$\geq 12t \Leftrightarrow t^2 + 9 - 6t \geq 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 \geq 0, \text{ rezultă că } A \geq 12.$$

9. Determinați numerele reale x, y, z , știind că $x = \frac{2z^2}{1+x^2}$, $y = \frac{2x^2}{1+y^2}$, $z = \frac{2y^2}{1+z^2}$.

7. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

- a) pentru orice numere întregi a, b impare, $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$;
- b) pentru orice numere întregi pare a și b , avem $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$;
- c) există a, b numere întregi impare cu $\sqrt{a^3 + b^3} \in \mathbb{Q}$.

8. Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

- a) $\frac{x\sqrt{3} + y}{2 - \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$;
- b) $\frac{x\sqrt{2} + y}{3 - \sqrt{2}} = 1 + y$.

9. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;
- b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;
- c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$;
- d) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;
- e) $(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc$;
- f) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$;
- g) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$;
- h) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea: $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că avem $\text{card}(A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) = 85$.

11. Fie $a, b, c > 0$ iar $a + b + c = 3$. Fie $A = \sqrt{9a+2} + \sqrt{9b+3} + \sqrt{9c+4}$. Demonstrați că $A < \frac{39}{2}$.

12. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ și $m, n, p \in \mathbb{N}$, astfel încât $a + mb = \sqrt{2}$, $a + nb = \sqrt{5}$, $a + pb = \sqrt{11}$.

13. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$ (proprietatea lui Arhimede).

14. Fie $r \in \mathbb{Q}_+$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Demonstrați că numărul $\frac{r+2}{r+1}$ este o aproximare „mai bună” pentru $\sqrt{2}$ (adică avem $\left| \frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2} \right| \leq |r - \sqrt{2}|$).

15. Construiți numai cu rigla și compasul imaginile geometrice ale numerelor:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{13}.$$

16. Determinați părțile întregi ale numerelor:

- a) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$;
- b) $b_n = \sqrt{n^2 + 6n}$;
- c) $c_n = \sqrt{n^2 + 7n}$.

17. Demonstrați că între orice două numere reale distincte există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

18. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{x^2 + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + 4} = a \in \mathbb{N}$.

19. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Demonstrați că cel mult două dintre numerele $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$, $2c - \frac{1}{a}$ sunt supraunitare.

20. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Aflați minimul expresiei:

$$E = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d}.$$

21. Rezolvați în numere reale ecuația $x^8 + y^8 + 6 = 8xy$.

22. Eliminați $a, b \in \mathbb{R}^*$ între relațiile $x = a + \frac{1}{a}$, $y = b + \frac{1}{b}$, $z = c + \frac{1}{c}$.

23. Fie $1 \leq a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comparați numerele $A = \frac{b^n - a^n}{n}$ și $B = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

24. Fie $a, b, c > 0$. Demonstrați $A \geq B$, unde:

$$A = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right) \left(c + \frac{1}{c}\right), B = \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right).$$

25. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Calculați $\sum_{i,j=1}^n f\left(\frac{i}{j}\right)$.

26. Fie $n \geq 4$. Calculați $S = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

27. Fie $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, $n \geq 3$, cu $\sum_{k=1}^n a_k = 2$. Demonstrați că $S_k \leq n$, unde:

$$S = \sqrt{a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \sqrt{a_2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \sqrt{a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})}.$$

28. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$. Demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \left(\frac{a+b+c}{ab+ac+bc}\right)^2} = A \in \mathbb{Q}$.

29. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Demonstrați că $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = B \in \mathbb{Q}$.

30. Fie $a, b, x > 0$, astfel încât $a + b = 2$. Demonstrați că $A \geq 2\sqrt{x+1}$, unde:

$$A = \sqrt{x + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{x + \frac{1}{b^2}}.$$